МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.86
DOI: https://doi.org/10.32851/2708-0366/2021.9.13

Білоусова Т.П.
старший викладач,
Херсонський державний аграрно-економічний університет
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6982-8960

Bilousova Tetiana
Kherson State Agrarian and Economic University

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РИНКУ ОДНОГО ТОВАРУ

MATHEMATICAL MODEL OF THE OPTIMAL MARKET OF ONE GOODS

У статті розглянуто нелінійну динамічну математичну модель вільного ринку одного товару, в якій виконаний баланс між пропозицією і попитом та враховується побажання кожного учасника ринку. Для досягнення поставленої мети проведено аналіз теорії та проблеми моделювання ринку. Модель попиту-пропозиції побудована відповідно до системи рекомендацій економічної поведінки на ринку та представлена нелінійною задачею математичного програмування. Шляхом об'єднання математичних моделей попиту та пропозиції математична модель ринку вирішує питання цілеспрямованості учасників ринку в сукупності. Розв'язок її базується на нормалізації критеріїв та принципі гарантованого результату. Для виявлення особливостей розв'язання задачі розглянуто спочатку найпростіший окремий випадок, а саме ринок одного товару (n = 1).

Ключові слова: *математична модель, функція попиту, функція пропозиції, рівновага, умовно оптимальна ціна, умовно максимальний прибуток.*

В статье рассмотрена нелинейная динамическая математическая модель свободного рынка одного товара, в которой выполнен баланс между предложением и спросом и учитываются пожелания каждого участника рынка. Для достижения поставленной цели проведен анализ теории и проблемы моделирования рынка. Модель спроса-предложения построена в соответствии с системой рекомендаций экономического поведения на рынке и представлена нелинейной задачей математического программирования. Путем объединения математических моделей спроса и предложения математическая модель рынка решает вопрос целеустремленности участников рынка в совокупности. Решение ее базируется на нормализации критериев и принципе гарантированного результата. Для выявления особенностей решения задачи рассмотрен сначала простейший отдельный случай, а именно рынок одного товара (n = 1).

Ключевые слова: *математическая модель, функция спроса, функция предложения, равновесие, условно оптимальная цена, условно максимальная прибыль.*

The market process consists of many acts of exchange of goods and services. Each such act involves a seller, on whose side there is a supply of goods, and a buyer, represented by a demand for goods. Of course, supply and demand are closely related and continuously interacting categories and serve as a link between production and consumption. The result of the interaction of supply and demand is the equilibrium price. It characterizes the state of the market in which the volume of demand is equal to the supply. To determine the point of market equilibrium and study the dynamics of commodity prices in the process of market transition from some non-

equilibrium to equilibrium is considered, in addition to demand lines, the criterion of optimal behavior of the seller in the market. In a competitive market in which there are a large number of buyers and sellers, we determine the equilibrium price, excluding prices at which a surplus or shortage of a product is formed. So, at a high price, manufacturers want to produce a large amount of a product, but buyers are ready to purchase only a small amount of a product, and overproduction occurs. At a low price, buyers are ready to purchase a large amount of a product, but manufacturers are ready to produce a small amount of goods, and there is a shortage of goods and services. At a certain average price, an equilibrium price, producers are ready to produce exactly as much as consumers wish and are able to purchase. There is no surplus in the market, in which the market would push the price of a product down, nor does a shortage of a product arise, in which the market does not cause an increase in the price of a product. At such an equilibrium price, the amount of supply and demand is balanced. The article analyzes the mathematical model of the optimal market in the case of one product. To achieve this goal, the paper analyzes the theory and problems of market modeling. The supply-demand model is built in accordance with a system of recommendations for economic behavior in the market, and is represented by a nonlinear problem of mathematical programming. By combining mathematical models of supply and demand, the mathematical model of the market solves the issue of purposefulness of market participants in the aggregate. Its solution is based on the normalization of criteria and the principle of a guaranteed result. The methodology for modeling the market, taking into account the functions of supply and demand, includes setting a problem, building a model and directly forecasting.

Key words: *mathematical model, demand function, supply function, equilibrium, conditionally optimal price, conditionally maximum profit.*

Постановка проблеми. Використання математичного моделювання в економіці дає змогу зробити більш глибоким кількісний економічний аналіз, розширити область економічної інформації, зробити більш ефективними економічні розрахунки. Математична модель відрізняється за своєю природою від оригіналу, але дослідження властивостей оригіналу за допомогою математичної моделі зручніше, більш дешеве та займає менше часу. Застосування методу математичного моделювання в економіці – це об’єктивний етап її розвитку, пов’язаний з існуванням стійких кількісних закономірностей і можливістю формалізованого опису багатьох, хоча й далеко не всіх, економічних процесів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема побудови моделі ринку, моделювання та прогнозування його розвитку є однією з найважливіших проблем економіки у зв’язку з переходом України на ринкові відносини. Більшість моделей ринку будувалася за принципом установлення конкурентної рівноваги, про існування якої було заявлено в роботі Л. Вальраса [1]. Математичне обґрунтування гіпотези Л. Вальраса було виконано у 1950-х роках у роботах К.Дж. Erроу, Г. Дебре [2], Л. Маккензі, Д. Гейла, Х. Нікайдо. Надалі велися роботи з удосконалення моделей та їх узагальнення у монографіях М. Морішіми, К. Ланкастера та інших сучасних авторів [3; 4]. Ці моделі ринку встановлювали баланс між пропозицією та попитом, але не могли бути моделлю ринку, оскільки в них, по-перше, була відсутня конкуренція як між виробниками, так і між споживачами, а по-друге, не відображена цілеспрямованість дій учасників ринку (виробників та споживачів), яка є основою конкуренції [5–7]. Нерівновага характеризує ринок, що не перебуває в рівновазі [8]. Порушення рівноваги може відбуватися дуже короткочасно або протягом тривалого періоду часу. Зазвичай на фінансових ринках це або ніколи не відбувається, або відбувається тільки миттєво, тому що торгівля відбувається безперервно, а ціни на фінансові активи можуть миттєво коригуватися з кожною угодою, щоби врівноважити попит і пропозицію. З іншого боку, багато економістів розглядають ринки праці які перебувають у стані дисбалансу, зокрема стані надлишкової пропозиції, протягом тривалих періодів часу.

Формулювання цілей статті. Модель ринку повинна відображати не тільки баланс між пропозицією та попитом, але й цілеспрямованість кожного учасника ринку з урахуванням їх загального взаємозв’язку. Такою математичною моделлю, яка може разом із балансом відобразити цілеспрямованість кожного учасника ринку, є векторна (багатокритеріальна) задача математичного програмування [3]. Для вирішення цього завдання розроблені методи розв'язання векторної задачі, засновані на нормалізації критеріїв та принципі гарантованого результату [9]. На конкурентному ринку, на якому є велика кількість покупців і продавців, за допомогою методу перебору визначаємо рівноважну ціну, виключаючи ціни, за яких формується надлишок або нестача продукту. Так, за високої ціни виробники бажають виробляти велику кількість продукту, але покупці готові придбати тільки малу кількість продукту, тому виникає перевиробництво. За малої ціни покупці готові придбати велику кількість продукту, але виробники готові виробляти малу кількість товару, тому виникає дефіцит товару й послуги. За якоїсь середньої рівноважної ціни виробники готові виробляти рівно стільки, скільки споживачі бажають і в змозі придбати. На ринку не виникає надлишок, за якого ринок штовхав би ціну на продукт вниз, не виникає брак продукту, за якого ринок не викликає підвищення ціни на продукт. За такої рівноважної ціни величина попиту та пропозиції врівноважуються. Розглянемо поведінку математичної моделі [9] на прикладі ринку одного товару.

Виклад основного матеріалу. Математична модель задачі [9] має рестриктивний характер з огляду на таке співвідношення:

$$Q_i^s(t)=\begin{cases}Q_i^d(t),\text{якщо}\,\mathrm{Q_i^d}(t)<Q_i(t),\\ Q_i(t),\text{якщо }\,\mathrm{Q_i^d}(t)\ge Q_i(t),\end{cases},\ \left(i=\overline{1,n}\right). \quad (1)$$

Вочевидь, слід брати до уваги, що кожен товар може виявитися в момент часу t в будь-якій із трьох вищезазначених зон (зони дефіциту, затоварення або балансу попиту й пропозиції). Оскільки цільова функція *J(t)*: $J(t)\Rightarrow \max\limits_{P(t)|Q(t)}$ по кожному товару в кожній зоні поводиться по-різному, під час розв'язання задачі оптимізації необхідний перебір 3*n* зон стану ринку за всіма товарами. Для виявлення особливостей вирішення цього завдання розглянемо спочатку найпростіший окремий випадок, а саме ринок одного товару (*n = 1*).

Умовно оптимальна ціна товару.

В цьому разі всі вектори стану ринку стають скалярами, матриця А також стає скаляром a > 0, формула (1) набуває такого вигляду: $Q^d(t)=Q_m-aP(t)$, і ми маємо всього 3 зони стану ринку, а саме зону, яка відповідає дефіциту товару на ринку (зона 1, у якій $Q(t)<Q^d(t)$), зону затоварення ринку (зона 2, у якій $Q(t)>Q^d(t)$) і зону балансу попиту та пропозиції (зона 3, область динамічної рівноваги, в якій $Q(t)=Q^d(t)$). Розглянемо ці зони докладніше.

1) У зоні товарного дефіциту $Q(t)<Q^d(t)$, відповідно до співвідношення (1) маємо $Q^s(t)=Q(t)$.

$$J(t)=Q(t)P(t)-Q(t)P_1+Q^o(t)(P_1-P_2)-\frac{R}{2}\big(P(t)-P(t-1)\big)^2\Rightarrow \sup_{P(t)|Q(}. \quad (2)$$

Це квадратична функція змінної *P(t)*, опукла вгору. Отже, точка максимуму досягається за такої умови:

$$\frac{\partial J(t)}{\partial P(t)}=Q(t)-R\big(P(t)-P(t-1)\big)=0,$$

звідки випливає таке:

$$P(t)=P(t-1)+\frac{Q(t)}{R}=P^{(1)}(t). \quad (3)$$

Як бачимо, $P^{(1)}(t)$ зростає зі зростанням *Q(t)* за лінійним законом. Вираз (3) буде справедливим не за будь-якого *Q(t)*, а лише за *Q(t),* що задовольняє умові $Q(t)<Q^d(t)$,

що належить до зони 1. Ця умова з урахуванням $Q^d(t) = Q_m - AP(t)$ при n = 1 та (3) має такий вигляд:

$$Q(t) < Q_m - aP^{(1)}(t) = Q_m - aP(t-1) - \frac{a}{R}Q(t),$$

звідки випливає таке:

$$\mathrm{Q}(\mathrm{t}) < \frac{R\left(Q_m - aP(t-1)\right)}{a+R} = Q^{(1)}(t). \tag{4}$$

Таким чином, в області 1 *P(t)* лінійно зростає зі зростанням *Q(t)* від такого значення:

$$\mathrm{P}^{(1)}(\mathrm{t})\Big|_{Q(t)=0} = P(t-1)$$

до такого значення:

$$\mathrm{P}^{(1)}(\mathrm{t})\Big|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{\left(Q_m + RP(t-1)\right)}{a+R} = P^{(1)}_{\max}(t),$$

причому умова належності *Q(t)* до області 1 виражається нерівністю (4).

2) У зоні затоварення ринку $Q(t) > Q^d(t)$ та відповідно до виразу (1) маємо $Q^s(t) = Q^d(t)$, таким чином, з урахуванням $Q^d(t) = Q_m - AP(t)$ при n = 1 маємо таке:

$$J(t) = \left(Q_m - aP(t)\right)P(t) - Q(t)P_1 + Q^o(t)\left(P_1 - P_2\right) - \frac{R}{2}\left(P(t) - P(t-1)\right)^2 \Rightarrow \sup_{P(t)|Q(t)}. \tag{5}$$

Це квадратична опукла вгору функція змінної *P(t)*. Отже, точка максимуму досягається за такої умови:

$$\frac{\partial J(t)}{\partial P(t)} = Q_m - 2aP(t) - R\left(P(t) - P(t-1)\right) = 0,$$

звідки випливає таке:

$$P(t) = \frac{Q_m + RP(t-1)}{2a+R} = P^{(2)}(t). \tag{6}$$

Як бачимо, $P^{(2)}(t)$ не залежить від *Q(t)* (залишається постійною за будь-якої *Q(t)* у цій області). Вираз (6) наявний лише за умови, що $Q(t) > Q^d(t)$, тобто за такої умови:

$$Q(t) > Q_m - aP^{(2)}(t) = \frac{(a+R)Q_m - aRP(t-1)}{2a+R} = P^{(2)}(t),$$ звідки випливає таке:

$$Q(t) > \frac{R\left(Q_m - aP(t-1)\right) + aQ_m}{2a+R} = Q^{(2)}(t). \tag{7}$$

Остання нерівність визначає умову, за якої *Q(t)* належить зоні 2. Неважко показати, що $Q^{(2)}(t) > Q^{(1)}(t)$. Дійсно, використовуючи вирази (4) і (7), отримаємо таке:

$$Q^{(2)}(t) - Q^{(1)}(t) = \frac{a^2\left(Q_m + RP(t-1)\right)}{(a+R)(2a+R)} > 0,$$

що й потрібно було довести.

3) У зоні балансу попиту та пропозиції (тобто в області динамічної рівноваги ринку) $Q(t) = Q^d(t)$ і відповідно до виразу (1) маємо, як і в області 2, обсяг продажів, що дорівнює попиту, тобто $Q^s(t) = Q^d(t)$, і прибуток *J(t)* у вигляді (5). При цьому $Q(t) = Q_m - aP(t)$, звідки випливає таке:

$$P(t) = \frac{Q_m - Q(t)}{a} = P^{(3)}(t). \tag{8}$$

Межами області 3 по Q(t) єточки $Q^{(1)}(t)$ та $Q^{(2)}(t)$:

$$Q^{(1)}(t) \le Q(t) \le Q^{(2)}(t). \tag{9}$$

Як бачимо з (8), в цій області $P^{(3)}(t)$ лінійно зменшується зі зростанням *Q(t)* від значення:

$$P^{(3)}(t)\Big|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a+R} = P^{(1)}_{\max}(t)$$

до значення:

$$P^{(3)}(t)\Big|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{2a+R} = P^{(2)}_{\max}(t).$$

Умовно максимальний прибуток. Оптимальна ціна товару й максимальний прибуток.

Знайдемо тепер оптимальну ціну товару та оптимальний рівень поставки товару на ринок, що забезпечують максимальний прибуток продавця, якщо $P(t-1)$, $P^{(1)}_{\max}(t)$ та $P^{(2)}(t)$ задовольняють обмеженням $P(t) > P_1$. Вирішення цього завдання проведемо за зонами (за зоною 1 (дефіцит товару), за зоною 2 (затоварення ринку), за зоною 3 (баланс попиту та пропозиції, тобто динамічна ринкова рівновага).

1) В зоні 1 $0 \le Q(t) \le Q^{(1)}(t)$. Після підстановки $P(t) = P^{(1)}(t)$ у вираз (2) для *J(t)* маємо таке:

$$J(t) = \frac{Q(t)^2}{2R} + \left(P(t-1) - P_1\right)Q(t) + Q^o(t)\left(P_1 - P_2\right) = J^{(1)}(t). \tag{10}$$

Як бачимо, $J^{(1)}(t)$ монотонно зростає зі зростанням *Q(t)* за лінійно-квадратичним законом, досягаючи максимального значення на кордоні області при $Q(t) = Q^{(1)}(t)$:

$$J^{(1)}_{\max}(t) = J^{(1)}(t)\Big|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)}. \tag{11}$$

Якщо залишок товару $Q^o(t)$ від продажів в попередній інтервал дискретного часу не перевищує величину $Q^{(1)}(t)$, то додаткове замовлення та поставка товару на ринок в обсязі $Q^я(t) = Q^{(1)}(t) - Q^o(t)$ (зокрема, $Q^я(t) = 0$ при $Q^o(t) = Q^{(1)}(t)$) забезпечує максимум прибутку. Інакше при $Q^o(t) > Q^{(1)}(t)$ слід шукати розв’язання задачі оптимізації прибутку в області 2 або 3.

2) У зоні 2 $Q(t) > Q^{(2)}(t)$. Після підстановки в *J(t)* для цієї зони $P(t) = P^{(2)}(t)$, незалежного від *Q(t)*, маємо таке:

$$J(t) = \left(Q_m - aP^{(2)}(t)\right)P^{(2)}(t) - Q(t)P_1 + Q^o(t)\left(P_1 - P_2\right) - \frac{R}{2}\left(P^{(2)}(t) - P(t-1)\right)^2 = J^{(2)}(t). \tag{12}$$

Як бачимо, $J^{(2)}(t)$ монотонно спадає зі зростанням *Q(t)* за лінійним законом, отже, досягає в цій зоні найбільшого значення при $Q(t) = Q^{(2)}(t)$:

$$J^{(2)}_{\max}(t) = J^{(2)}(t)\Big|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)}. \tag{13}$$

Якщо $Q^o(t) \le Q^{(2)}(t)$, то додаткове замовлення та поставка товару на ринок в обсязі $Q^я(t) = Q^{(2)}(t) - Q^o(t)$ забезпечує отримання цього максимуму прибутку. Якщо ж $Q^o(t) > Q^{(2)}(t)$, то $Q^я(t) = 0$, досягається лише значення прибутку $J^{(2)}(t)\Big|_{Q(t)=Q^o(t)} < J^{(2)}_{\max}(t)$.

3) У зоні 3 $Q^{(1)}(t) \le Q(t) \le Q^{(2)}(t)$. Після підстановки $P(t) = P^{(3)}(t)$ у *J(t)* для цієї зони маємо таке:

$$J(t) = Q(t)\frac{Q_m - Q(t)}{a} - Q(t)P_1 + Q^o(t)\left(P_1 - P_2\right) - \frac{R}{2}\left(\frac{Q_m - Q(t)}{a} - P(t-1)\right)^2 = J^{(3)}(t). \tag{14}$$

Це опукла вгору лінійно-квадратична функція змінної $Q(t)$. У точці максимуму $J^{(3)}(t)$ по $Q(t)$ маємо таке:

$$\frac{\partial J^{(3)}(t)}{\partial Q(t)} = \frac{1}{a^2}\left[R\left(Q_m - aP(t-1)\right) + a\left(Q_m - aP_1\right) - (2a+R)Q(t)\right] = 0, \tag{15}$$

звідки випливає таке:

$$Q(t) = \frac{R\left(Q_m - aP(t-1)\right) + a\left(Q_m - aP_1\right)}{2a+R} = Q^{(3)}(t). \tag{16}$$

У цій точці $J^{(3)}(t)$ досягає максимального значення. Неважко бачити, що $Q^{(1)}(t) \le Q^{(3)}(t) \le Q^{(2)}(t)$, тобто точка максимуму $Q^{(3)}(t)$, лежить в області 3. Дійсно, з урахуванням того, що $Q_m > P(t-1) > P_1$, маємо таке:

$$Q^{(3)}(t) - Q^{(1)}(t) = \frac{aR\left(Q_m - aP(t-1)\right)}{(2a+R)(a+R)} + \frac{a\left(Q_m - aP_1\right)}{2a+R} > \frac{a^2\left(Q_m - aP(t-1)\right)}{(2a+R)(a+R)} > 0.$$

З іншого боку, $Q^{(3)}(t) - Q^{(2)}(t) = -\dfrac{aP_1}{2a+R} < 0$.

Максимальне значення прибутку в зоні 3 дорівнює (при $Q^o(t) < Q^{(3)}(t)$) такому:

$$J^{(3)}_{\max}(t) = J^{(3)}(t)\Big|_{Q(t)=Q^{(3)}(t)}. \tag{17}$$

Це значення є також глобально максимальним, потенційно можливим при $Q^o(t) \le Q^{(3)}(t)$. Якщо ж $Q^{(3)}(t) \le Q^o(t) \le Q^{(2)}(t)$, то глобально максимальне значення прибутку не може бути досягнуто, досягається тільки умовно максимальне значення (при фіксованому $Q^o(t)$) всередині зони 3, що лежить між $J^{(3)}_{\max}(t)$ та $J^{(2)}(t)$.

Неважко показати, що:

$$\left.\frac{dJ^{(3)}(t)}{dQ(t)}\right|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \left.\frac{dJ^{(1)}(t)}{dQ(t)}\right|_{Q(t)=Q^{(1)}(t)} = \frac{Q_m + RP(t-1)}{a+R} - P_1 > 0;$$

$$\left.\frac{dJ^{(3)}(t)}{dQ(t)}\right|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = \left.\frac{dJ^{(2)}(t)}{dQ(t)}\right|_{Q(t)=Q^{(2)}(t)} = -P_1 < 0,$$

тобто умовно оптимальний прибуток $J(t)$ – неперервна і всюди диференційована (у всіх зонах, включаючи межі зон) функція змінної $Q(t)$.

Вочевидь, глобальний максимум прибутку може бути отриманий тільки тоді, якщо обсяг залишку товару, який не продається на попередньому інтервалі часу, не перевищує величину оптимального обсягу поставки товару на ринок: $Q^o(t) \le Q^{(3)}(t)$. Інакше прибуток продавця буде менше максимально можливого. Причому якщо при цьому обсяг залишків товару буде залишатися в зоні 3, тобто буде лежати в інтервалі $Q^{(3)}(t) < Q^o(t) \le Q^{(2)}(t)$, то ринок буде залишатися в стані динамічної рівноваги (попит на товар буде залишатися рівним пропозиції, яким буде виступати залишок товару). Тільки при $Q^o(t) > Q^{(2)}(t)$ пропозиція товару перейде в зону 2, почнеться затоварення ринку.

Рівноважна ціна й рівноважний прибуток.

Отриманий результат можна сформулювати таким чином.

В умовах справедливості співвідношень математичної моделі [Я] максимальний прибуток продавця на ринку одного товару на кожному інтервалі дискретного часу t досягається при рівності і тільки при рівності попиту і пропозиції $Q^d(t) = Q_m - aP(t) = Q(t)$ в точці:

$$\widehat{P}(t)=\frac{Q_m-\widehat{Q}(t)}{a},\ \widehat{Q}(t)=\frac{R\left(Q_m-aP(t-1)\right)+a\left(Q_m-aP_1\right)}{2a+R},$$

де P_1 – закупівельна ціна товару, $P(t-1)$ – ціна товару в попередньому періоді, $\widehat{Q}(t)$ – оптимальний обсяг поставки товару на ринок у момент часу *t*, $\widehat{P}(t)$ – оптимальна ціна товару в цей момент часу. З цього випливає рекурентне співвідношення, що визначає динаміку оптимальної ціни товару тоді, коли попереднє значення ціни теж оптимальне $\left(P(t-1)=\widehat{P}(t-1)\right)$:

$$\widehat{\mathrm{P}}(\mathrm{t}+1)=\frac{R}{2a+R}\widehat{P}(t)+\frac{Q_m+aP_1}{2a+R},\ \widehat{P}(0)=P_0. \tag{18}$$

Це рівняння справедливо за умови, що обсяги залишків непроданого товару не перевищують величини оптимальної поставки товару на ринок.

Оскільки $R/(2a+R)<1$, послідовність оптимальних цін $\left\{\widehat{P}(t)\right\}$ при $t\to\infty$ прямує до кінцевої межі:

$$P^*=\frac{Q_m+aP_1}{2a}, \tag{19}$$

що є асимптотично рівноважним значенням ціни. Ця величина відразу знаходиться з (18), оскільки при $t\to\infty$ і $\widehat{P}(t+1)\to P^*$, $\widehat{P}(t)\to P^*$, отже, в стані асимптотичної рівноваги рівняння (18) набуває такого вигляду: $P^*=\left(R/(2a+R)\right)P^*+\left(Q_m+aP_1\right)/(2a+R)$, звідки знаходиться значення P^*, представлене у формулі (19). Відповідне йому асимптотично рівноважне значення рівня поставки товару на ринок точно збігається з величиною купівельного попиту на товар за оптимальною ціною P^*:

$$Q^*=Q_m-aP^*=\frac{Q_m-aP_1}{2} \tag{20}$$

та дорівнює половині купівельного попиту на товар за ціною закупівлі P_1.

Рішення різницевого рівняння (18) являє собою згасаючу експоненту:

$$\widehat{P}(t)=\alpha^t\left(P_0-P^*\right)+P^*=txp(-\beta t)\left(P_0-P^*\right)+P^*, \tag{21}$$

де $\alpha=R/(2a+R)<1$, $\beta=\left|\ln\left(R/(2a+R)\right)\right|$. При $P_0\neq P^*$ оптимальна ціна поступово наближається до асимптотично рівноважної. При $P_0=P^*$ відразу маємо асимптотично рівноважну ціну: $\widehat{P}(t)\equiv P^*$.

За ступенем наближення ціни товару до асимптотично рівноважного значення P^* прибуток продавця наближається до свого асимптотично рівноважного значення. Якщо за асимптотичної рівноваги ринку $\mathrm{Q}^0<Q^*$, то асимптотично рівноважний прибуток дорівнює такому:

$$J^*=Q^*\left(P^*-P_1\right)+Q^0\left(P_1-P_2\right). \tag{22}$$

Висновки. Отримана нелінійна рестриктивна (модель, що підкоряється обмеженням типу нерівностей) динамічна математична модель вільного ринку багатьох товарів в умовах лагу поставок товарів на ринок і лінійної залежності вектору попиту від вектору цін. Знайдені оптимальні з точки зору прибутку продавця цін та поставок товарів на ринок. Детально проаналізована поведінка математичної моделі оптимального ринку у найпростішому випадку, а саме ринку одного товару (*n = 1*).

Список використаних джерел:

1. Walras L. Elements d'Economie Politique Pure. *Revue de Théologie et de Philosophie et Compte-rendu des Principales Publications Scientifiques.* 1874. Vol. 7. P. 628–632. URL: https://www.jstor.org/stable/44346456?seq=1#metadata_info_tab_contents.

2. Arrow K.J., Debreu G. Existence of Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*. 1954. Vol. 22. Issue 3. P. 265–290.

3. Козак Ю.Г. Мацкул В.М. Математичні методи та моделі для магістрів з економіки. Практичні застосування : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2017. 254 с.

4. Білоусова Т.П., Лі В.Е. Математичне моделювання рівноваги функцій попиту та пропозиції. *Сучасна молодь у світі інформаційних технологій :* матеріали ІІ Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції молодих вчених та здобувачів вищої освіти, присвяченої Дню науки (м. Херсон, 14 травня 2021 р.). Херсон : ФОП Вишемирський В.С., 2021. С. 152–155.

5. Поддубный В.В., Романович О.В. Рынок с фиксированной линией спроса как оптимальная система. *ФАМЭТ'2011 :* Труды X Международной конференции (г. Красноярск, 23–24 апреля 2011 г). Красноярск : КГТЭИ – СФУ, 2011. С. 318–323.

6. Поддубный В.В., Романович О.В. Рестриктивная динамическая модель инерционного рынка с оптимальной поставкой товара на рынок в условиях запаздывания. *Вестник Томского государственного университета.* 2011. №4 (17). С. 16–24.

7. Вітлінськії В.В. Моделювання економіки : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2003. 408 с.

8. O'Sullivan A., Sheffrin Steven M. Economics: Principles in Action. Upper Saddle River. New Jersey : Pearson Prentice Hall, 2003. 550 p. ISBN 0-13-063085-3.

9. Білоусова Т.П. Математична модель оптимального ринку. *Таврійський науковий вісник. Серія: Економіка.* 2021. № 8. С. 70–75. DOI: https://doi.org/10.32851/2708-0366/2021.8.10.

References:

1. Walras L. (1874) Elements d'Economie Politique Pure. *Revue de Théologie et de Philosophie et Compte-rendu des Principales Publications Scientifiques,* no. 7, pp. 628–632. Available at: https://www.jstor.org/stable/44346456?seq=1#metadata_info_tab_contents.

2. Arrow K.J., Debreu G. (1954) Existence of equilibrium for a competitive economy. *Econometrica,* vol. 22, no. 3, pp. 265–290.

3. Kozak Yu.H. Matskul V.M. (2017) Matematychni metody ta modeli dlia mahistriv z ekonomiky. Praktychni zastosuvannia: navch. posib. [Mathematical Methods and Models for Masters in Economics. Practical Applications: a textbook]. Kyiv: Tsentr uchbovoi literatury.

4. Bilousova T.P., Li V.E. (2021) Matematychne modeliuvannia rivnovahy funktsii popytu ta propozytsii. [Mathematical Modeling of the Balance of Supply and Demand Functions]. *Suchasna molod v sviti informatsiinykh tekhnolohii:* materialy II Vseukr. nauk.-prakt. internet-konf. molodykh vchenykh ta zdobuvachiv vyshchoi osvity, prysviachenoi Dniu nauky (Kherson, 14 May, 2021). Kherson: FOP Vyshemyrskyi V.S., pp. 152–155.

5. Poddubnyiy V.V., Romanovich O.V. (2011) Ryinok s fiksirovannoy liniey sprosa kak optimalnaya sistema. [Market with a Fixed Demand Line as an Optimal System]. *FAMET'2011:* Trudyi X Mezhdunarodnoy konferentsii (Krasnoyarsk, 23–24 April, 2011). Krasnoyarsk: KGTEI – SFU, pp. 318–323.

6. Poddubnyiy V.V., Romanovich O.V. (2011) Restriktivnaya dinamicheskaya model inertsionnogo ryinka s optimalnoy postavkoy tovara na ryinok v usloviyah zapazdyivaniya [Restrictive Dynamic Model of an Inertial Market with Optimal Delivery of Goods to the Market in Lagging Conditions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. UVTI,* no. 4 (17), pp. 16–24.

7. Vitlinskii V.V. (2003) Modeliuvannia ekonomiky: navch. posibnyk [Modeling the Economy: a Textbook]. Kyiv: KNEU. (in Ukrainian)

8. O'Sullivan, Arthur; Sheffrin, Steven M. (2003) Economics: Principles in Action. Upper Saddle River. New Jersey: Pearson Prentice Hall, p. 550. ISBN 0-13-063085-3.

9. Bilousova T.P. (2021). Matematychna model optymalnoho rynku [Mathematical model of the optimal market]. *Taurian Scientific Bulletin. Series: Economics,* vol. 8, pp. 70–75.